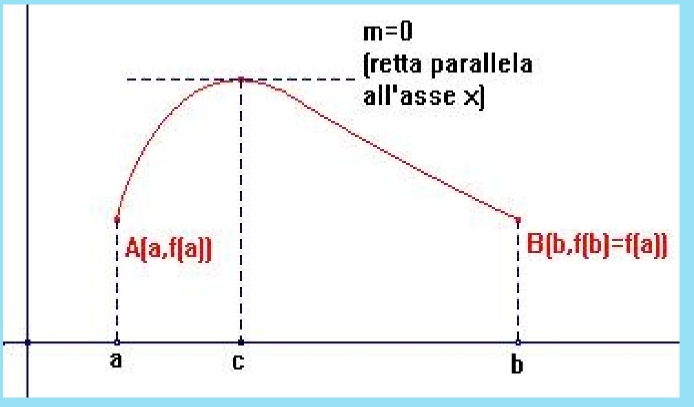
Calcolo differenziale

Il teorema di Rolle

TEOREMA DI ROLLE

Ipotesi

- **f continua su [a, b]**
- **f derivabile per lo meno su (a,b)**
- **f(a) = f(b)**



Tesi

Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che $f'(c) = 0$

Giustificazione con l'intuizione geometrica

La curva grafico della funzione, partendo dal punto A(a,f(a)), si snoda con continuità, senza interruzioni, fino ad approdare nel punto B(b,f(b)).

Ma A e B hanno la stessa ordinata (infatti per ipotesi è f(a)=f(b)); quindi, se il grafico parte da A in salita (discesa), per poter giungere a B dovrà prima o poi ridiscendere (risalire) e nel cambiare la "direzione di marcia" sarà obbligato a toccare un massimo (minimo), nel quale la retta tangente sarà orizzontale e quindi la derivata sarà nulla.

Dimostrazione rigorosa:

Sia f continua su [a, b], derivabile per lo meno su (a, b), e tale che f(a) = f(b).

Per il teorema di Weierstrass, f ammette, su [a, b], minimo assoluto m e massimo assoluto M.

- ✓ Se è m = M, allora f è costante su tutto [a, b], quindi f ' (x) = 0 per ogni x di [a, b] e la tesi è vera.

- ✓ Se è m ≠ M, allora almeno uno dei due valori m, M deve essere distinto dal valore f(a) = f(b);

quindi, dovrà essere assunto dalla f in corrispondenza di un'ascissa c diversa sia da a che da b:

(a<c<b).

Dico ora che f ' (c) = 0.

Supponiamo, per meglio fissare le idee, che c sia il punto di MINIMO assoluto:

f(c)=m, ossia: $\forall x \in D,\ f(x) \geq m = f(c)$

(del tutto analoga sarebbe la dimostrazione nel caso f(c)=M)

- Se costruiamo il rapporto incrementale DESTRO in c, avremo:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

perché, su tutto il Dominio, è $f(x) \geq f(c)$

quindi $f(x)-f(c) \geq 0$

e inoltre, essendo x alla destra di c, sarà pure

$$x-c>0$$

- Se invece costruiamo il rapporto incrementale SINISTRO in c, avremo:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

perché, su tutto D, è $f(x) \geq f(c)$

quindi $f(x)-f(c) \geq 0$

ma, essendo x alla sinistra di c, sarà $x-c<0$.

Ma l'ipotesi ci dice che f è derivabile su tutto (a, b) quindi anche in c;

pertanto i due rapporti incrementali destro e sinistro in c dovranno tendere allo stesso limite

(la derivata f ' (c)) quando si fa tendere x a c.

Essendo, come abbiamo visto,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

quando x>c;

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

quando x<c,

dovrà essere

$$\lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

Ora, tali due limiti, in considerazione dei loro segni, possono essere uguali soltanto se entrambi nulli.

Con ciò resta provato che f ‘ (c) = 0, cioè la tesi.

3. I TEOREMI DI LAGRANGE (O “DEL VALOR MEDIO”) E DI CAUCHY

TEOREMA

DI LAGRANGE

O “DEL VALOR MEDIO”

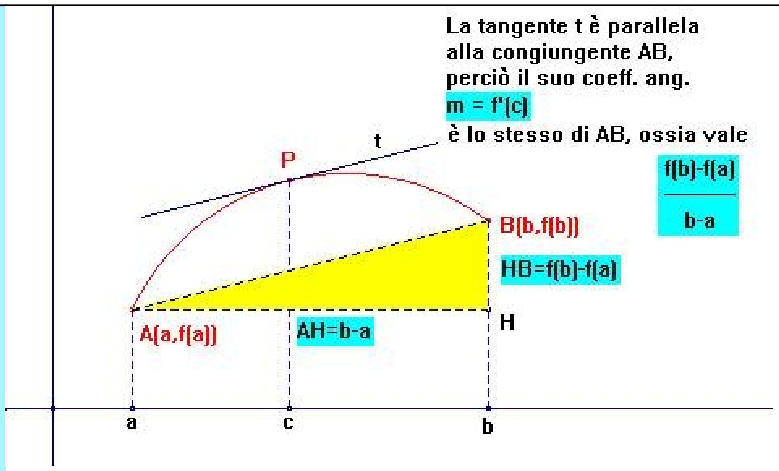
Ipotesi

- **f continua su [a, b]**
- **f derivabile**

  per lo meno su (a, b)

Tesi

Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che



$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Giustificazione con l’intuizione geometrica

Si capisce che, se f verifica le ipotesi del teorema, deve per forza esistere un punto P sul grafico nel quale la tangente t alla curva sia parallela alla secante passante per i punti A(a, f(a)) e B(b, f(b)) .

Detta c l’ascissa di P, la tangente t ha coeff. ang.

$$f'(c)$$

e la secante AB ha coeff. ang.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ma essendo t ed AB parallele, tali due coefficienti angolari saranno uguali.

Dimostrazione rigorosa del teorema di Lagrange

Si effettua riconducendosi al teorema di Rolle.

A tale scopo, si costruisce la funzione ausiliaria

F(x) = f(x) - kx

con k scelto in modo tale che a tale funzione F si possa poi applicare Rolle.

Dovrà verificarsi la condizione F(a) = F(b) e quindi dovrà essere

f(a) - ka = f(b)-kb

da cui dopo alcuni passaggi:

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Applichiamo dunque Rolle alla funzione

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x:$$

ne deduciamo l'esistenza di un'ascissa c, strettamente compresa fra a e b, per la quale

$$F'(c) = 0$$

Ma è

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

quindi avremo, per questa ascissa c,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ossia

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

come volevasi dimostrare.

TEOREMA DI CAUCHY

Ipotesi

- **f , g continue su [a, b]**
- **e derivabili per lo meno su (a, b)**
- $g'(x) \neq 0$ **su tutto (a,b)**

Tesi

Esiste almeno un punto c in (a, b) tale che

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Dimostrazione:

Come per Lagrange, si utilizza una funzione ausiliaria: **F(x) = f(x)- kg(x)**, con k determinato in modo che

F(a) = F(b); a questa funzione ausiliaria F si applicherà poi il teorema di Rolle, deducendo facilmente la tesi.

4. **IL TEOREMA (meglio: I TEOREMI) DI DE L'HOSPITAL**

A

Teorema

(Primo teorema di De l'Hospital)

Sia I_c un intorno di $c \in R$, e siano f(x) e g(x) due funzioni definite e derivabili su tutto $I_c - \{c\}$

(non è necessario fare alcuna ipotesi sul comportamento delle due funzioni IN c, dove, addirittura, l'una o l'altra o entrambe le funzioni potrebbero persino non essere definite).

Sia inoltre

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

cosicché il calcolo del limite

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

si presenti come forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Supponiamo infine che sia $g'(x) \neq 0$

B

- **Esempio 1:**

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{sen(\pi x)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{\pi \cos \pi x} = \frac{4}{\pi}$$

✓ Osservazione importante:

la catena appena scritta ha senso perché il secondo dei due limiti,

quello del rapporto fra le derivate, esiste … nel caso non fosse

esistito il secondo limite, il discorso per quanto riguarda

il primo limite sarebbe rimasto aperto.

Ossia, se il

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

non esiste,

nulla si può dire, per il momento, sul

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Quest'ultimo potrà non esistere, oppure esistere finito o infinito,

a seconda dei casi.

su tutto $I_c - \{c\}$.

Bene!

il teorema dice che, sotto le ipotesi di cui sopra, se esiste il

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora esiste pure il

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e coincide col precedente, ossia risulta

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio 2:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(3x-2)}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{3}{3x-2}}{2x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{3}{(3x-2)(2x+1)} = 1$$

- **Esempio 3:**

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^3-3x-2} = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2}{3x^2-3} = \infty$$

L'alternativa a De l'Hospital, in quest'ultimo caso, sarebbe stata di scomporre in fattori e semplificare:

con De l'Hospital, comunque, la determinazione del limite risulta più rapida.

C

In pratica, il teor. di De l'Hospital dice che

(se, beninteso, sono verificate determinate ipotesi)

il limite del rapporto di due funzioni, che si presenti sotto la forma di indecisione [0/0],

è uguale al limite del rapporto delle loro derivate.

- Il teorema vale anche se l'intorno I_c e solo unilaterale.
- Il teorema vale anche se x, anziché tendere a $c \in R$, tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$

D

Il "secondo teorema di de l'Hospital"

Un enunciato analogo al precedente

vale se il limite del rapporto f/g

si presenta sotto la forma di indecisione $[\infty / \infty]$

- **Esempio 4:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{e^x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{e^x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+4}{e^x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0^+$$

Quando si cita il "Teorema di De l'Hospital" ci si vuole di norma riferire

indifferentemente all'uno o all'altro dei due teoremi che abbiamo presentato,

se si preferisce, all'unico enunciato che si otterrebbe riunendoli.

E

Quando il rapporto delle derivate risulta essere ancora una forma di indecisione

$[0/0]$ *o* $[\infty/\infty]$

è possibile applicare il Teorema di De l'Hospital una seconda volta, ed eventualmente poi una terza …

- **Esempio 5:** $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$$

F

Il teorema di De l'Hospital si riferisce alle forme di indecisione $[0/0]$ oppure $[\infty/\infty]$;

tuttavia, anche le forme $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$

e le forme di indecisione con potenze: $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$

possono a volte essere brillantemente risolte riconducendole a $\boxed{[0/0]}$ oppure $\boxed{[\infty/\infty]}$ e poi applicando De l'Hospital.

A tale scopo, si utilizzano le identità

- $$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}=\frac{g}{\frac{1}{f}}$$ (si lascerà a numeratore l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza)

- $$f(x)^{g(x)}=e^{\ln\left[f(x)^{g(x)}\right]}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

- $$f-g=f\left(1-\frac{g}{f}\right)=g\left(\frac{f}{g}-1\right)$$

  (si raccoglierà o l'una o l'altra delle due funzioni, a seconda della convenienza;

  tuttavia, di norma queste ultime formule non sono molto utili perché possono essere

  sostituite da procedimenti alternativi più vantaggiosi)

- **Esempio 6** $(0\cdot\infty)$: $$\lim_{x\to0+}x\ln x=\lim_{x\to0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0+}(-x)=0^-$$