

# Calcolo differenziale

## CONSEGUENZE NOTEVOLI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

**Se una funzione ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), essa è costante in quell'intervallo**

### *Dimostrazione*

Se è  $f'(x) \equiv 0$  su tutto un intervallo,

allora, presi due qualsivoglia punti  $x_1, x_2$  di  $I$ , dovrà essere necessariamente  $f(x_1) = f(x_2)$ , in quanto, se così non fosse, ossia se  $f(x_1)$  fosse diverso da  $f(x_2)$ , per il teorema di Lagrange esisterebbe, fra  $x_1$  e  $x_2$ , un'ascissa  $c$  nella quale si avrebbe

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

contro l'ipotesi che  $f'(x)$  sia identicamente nulla in  $I$ .

Ciò prova che la  $f$  è costante su  $I$ .

**Se due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  hanno derivate uguali in tutti i punti di un intervallo (chiuso o aperto, limitato o illimitato), allora differiscono per una costante.**

### *Dimostrazione*

Se è  $f'(x) \equiv g'(x)$  su tutto un intervallo  $I$ , allora, considerata la funzione ausiliaria

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

si avrà  $F'(x) = f'(x) - g'(x) \equiv 0$  su  $I$ ,

da cui, per il teorema precedente,  $F(x) = c$  con  $c$  costante,

$$\text{e quindi } f(x) - g(x) = c$$

come volevasi dimostrare.

## Perché il Teorema di Lagrange viene anche detto “del valor medio”?

In Fisica, dato lo spazio percorso in funzione del tempo attraverso la funzione  $s=s(t)$ , la derivata  $s'(t)=ds/dt$  fornisce, istante per istante, la velocità del moto:  $s'(t)=v(t)$

Se l'intervallo temporale nel quale vogliamo studiare il moto è  $a \leq t \leq b$ , la velocità media è data invece dal rapporto  $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$ .

Ricordiamo che “velocità media” di un moto significa “quella velocità la quale, se fosse stata mantenuta costante per tutto il tempo del moto, avrebbe dato luogo al medesimo spostamento complessivo che si è registrato in regime di velocità varia”.

Ora, il valore  $t=c$  di cui il teorema di Lagrange assicura l'esistenza, è tale che

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

$$v(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

quindi la velocità in tale istante è  $\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$  = velocità media del moto.

In definitiva, Lagrange assicura (se, come di norma avviene, la funzione  $s(t)$  soddisfa a determinate ipotesi di regolarità) l'esistenza di un istante  $c$  nel quale la velocità istantanea è uguale alla velocità media del moto: di qui la denominazione del teorema.

## Crescenza e decrescenza di una funzione

Il teorema di Lagrange consente di stabilire un legame tra il segno della derivata in un intervallo e la crescita o decrescenza di una funzione

Una **funzione** si dice "**crescente in senso lato**", o anche "**non decrescente**", in un insieme

$E \subseteq \mathbb{R}$ , se

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Analogamente si potrà parlare, adattando definizioni già date, di funzione crescente in senso lato (o non decrescente), in un intorno di un punto  $c$ , o in un punto  $c$ .

E' del tutto ovvio poi il passaggio alle definizioni "gemelle" riguardanti una funzione "decrescente in senso lato", o "non crescente", in un insieme  $E$ , nell'intorno di un punto  $c$ , o in un punto  $c$ .

Quando scriveremo "crescente" (o "decrescente"), senza aggiungere altro, sottintenderemo sempre "in senso stretto".

### □ Teorema.

Se  $f$  è derivabile in  $c$  ed è  $f'(c) > 0$ , allora  $f$  è crescente in  $c$ .

Se  $f$  è derivabile in  $c$  ed è  $f'(c) < 0$ , allora  $f$  è decrescente in  $c$ .

### Giustificazione intuitiva del Teorema

Dal punto di vista geometrico intuitivo, appare subito plausibile che il teorema sia vero perché la condizione

$$f'(c) > 0$$

significa che la retta tangente nel punto di ascissa  $c$  ha coefficiente angolare positivo e quindi è "in salita".

Si capisce allora che dovrà essere "in salita" anche il grafico della funzione quando si passa dalla sinistra alla destra dell'ascissa  $c$  (vedi figura 2 qui a fianco).



Fig. 2

## Dimostrazione

(come già dichiarato nell' Osservaz. 1 al Teor. 1, farò riferimento solo alla prima delle due proposizioni "gemelle". E' del tutto evidente il fatto che il discorso relativo alla seconda, altro non sarebbe che una noiosa ripetizione - con ovvie modifiche - di quanto già detto).

Sia  $f'(c) > 0$ . Per definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, avremo:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0$$

Per il Teorema della Permanenza del Segno, esiste dunque un intorno di  $c$  tale che, per ogni  $x$  di quell'intorno (eccettuato  $x = c$ ) si abbia

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

Ma se la frazione  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  è positiva, allora

- per  $x < c$  (e quindi  $x - c < 0$ ) dovrà essere  $f(x) - f(c) < 0$  ossia  $f(x) < f(c)$
- per  $x > c$  (e quindi  $x - c > 0$ ) dovrà essere  $f(x) - f(c) > 0$  ossia

La tesi è così dimostrata.