Il differenziale

Il **differenziale** è uno "strumento" del **calcolo differenziale** (da cui esso prende il nome) che estende ed "anima" il concetto di **derivata**.

In questa pagina vogliamo descrivere alcune delle più importanti **proprietà** del differenziale soprattutto dal punto di vista **geometrico** ma non solo.

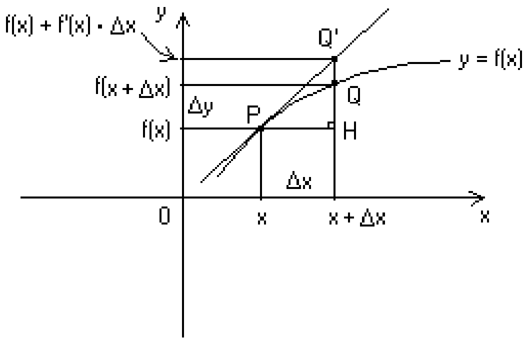
Con lo scopo di descrivere dette proprietà nel modo più semplice possibile, abbiamo semplificato di molto il formalismo rendendolo il più possibile "intuitivo" oltre all'avere rinunciato alla rigorosità delle condizioni relative alla continuità, derivabilità ecc.

Per esigenze di semplicità (dove non esplicitamente indicato) ometteremo anche la specificazione dei domini delle funzioni in gioco assumendo che essi vengono scelti opportunamente.

La presentazione del concetto di differenziale qui riportata, tiene conto della sua "evoluzione storica".
Vi è una prima definizione "intuitiva" ed una più moderna definizione rigorosa. Purtroppo spesso ci si limita solo alla prima rinunciando così di fatto alla comprensione dei "sottili" e "profondi" significati
che la definizione rigorosa di differenziale contiene. Questa pagina è un tentativo di presentare il concetto di differenziale in un modo completo anche se espresso in modo molto "semplice".

Il differenziale di funzioni $f: R \to R$ **(definizione intuitiva)**.

Consideriamo la **derivata** $f'(x)$. Il suo significato geometrico è il seguente :



Dal grafico risulta chiaro che per $\Delta x \to 0$ i punti Q e Q' vengono a coincidere per cui si può affermare che :

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

cioè :

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x) \cdot \Delta x$$

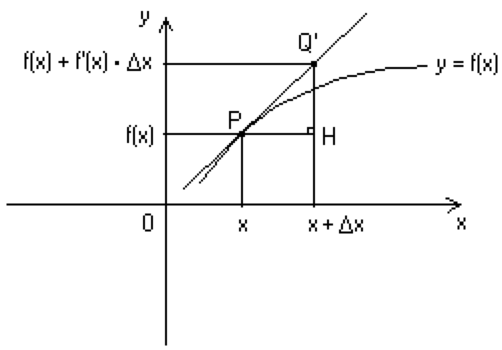
ovvero :

$$\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x \, .$$

Si può perciò affermare che la **derivata** di una funzione in un punto ci permette di **approssimare** l'**incremento** della **funzione** in corrispondenza di un **incremento** della variabile indipendente a partire da quel punto.

Questo fatto è di **estrema importanza** ed è alla base del calcolo differenziale.

Osservando il grafico precedente possiamo affermare anche che la formula $\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x$ **linearizza** la funzione f a partire dal punto x. Si **approssima** quindi la funzione con una **retta** :



e l'approssimazione è tanto migliore quanto più ci si avvicina al punto P.
In definitiva si può dire:

"Il differenziale di una funzione df(x) è uguale all'incremento dell'ordinata del punto P della retta tangente alla curva y = f(x) nel punto P (x ; f(x)), quando si passa da tale punto P di ascissa x a quello Q' di ascissa x + Δx."

Storicamente, per indicare che la formula $\Delta y \cong f'(x) \cdot \Delta x$ è tanto più "vera" quanto più Δx è vicino a 0 , entrò in uso la scrittura :

$$dy = f'(x)dx$$

dove i simboli dx e dy indicano quantità "**infinitesime**" dette rispettivamente **differenziale** della variabile indipendente x e **differenziale** della variabile dipendente y.

Il simbolo dy rappresenta quindi il **differenziale della funzione** f nel punto x ed è dato dalla formula $dy = f'(x)dx$.

Abbiamo qui una **prima definizione "storica" di differenziale dal valore "intuitivo"**. Questa definizione non è completamente soddisfacente perché il termine "infinitesimo" non è definibile esattamente,
ma solo, appunto, intuitivamente. Il **calcolo infinitesimale**, basato sul concetto di infinitesimo, venne
successivamente precisato e rifondato su concetti rigorosi secondo i dettami della nascente

matematica
moderna basata sulla **teoria degli insiemi**. Anche il nome "**calcolo infinitesimale**" fu abbandonato,
preferendo il più moderno "**calcolo differenziale**".