Studio di funzione

In matematica per **studio di funzione** si intende quell'insieme di procedure che hanno lo scopo di analizzare una funzione $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ al fine di determinarne alcune caratteristiche qualitative. Uno studio di funzione correttamente condotto permette di tracciare il grafico della funzione.

Operazioni per effettuare lo studio di funzione

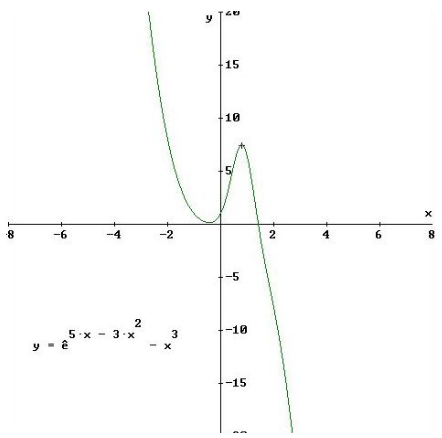

Grafico della funzione $y = e^{5x-3x^2} - x^3$, realizzato con Derive 5

Introduciamo dei concetti base per effettuare lo studio di una funzione:

Determinazione dell'insieme di definizione

Per determinare l'insieme di definizione (dominio) di una funzione assegnata in termini di funzioni elementari, a meno di indicazioni esplicite, si deve individuare il sottoinsieme dei numeri reali più esteso entro il quale l'espressione che la definisce non perda di senso. In particolare conviene porre l'attenzione alle seguenti evenienze:

- le funzioni fratte non esistono nei punti dove il denominatore si annulla,
- le funzioni sotto radice di indice pari devono essere poste maggiori o tuttalpiù uguali a zero, mentre quelle a indice di radice dispari esistono in tutto R
- le funzioni logaritmiche deve essere posto l'argomento strettamente maggiore di zero,
- le funzioni trigonometriche tranne seno e coseno non esistono in determinati multipli di π o $\pi/2$

Simmetrie e periodicità

Si deve porre l'attenzione alle eventuali simmetrie e periodicità della funzione che, se individuate, semplificano notevolmente lo studio della funzione.

Si veda Funzioni pari e dispari e Funzione periodica.

Intersezioni con gli assi

Può essere utile a questo punto cominciare ad individuare alcuni punti del piano che stanno sul grafico della funzione, in particolare si è soliti cercare le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

Per determinarle si opererà come segue:

- **intersezioni con l'asse *x*:** sono i punti di coordinate $(x, 0)$ dove x è soluzione dell'equazione $f(x) = 0$. Semplicemente basta sostituire alle y il valore 0. Si possono presentare diverse eventualità:
  - l'equazione potrebbe non avere soluzioni, e in questo caso la funzione non ha intersezione con l'asse *x*,
  - potrebbe avere una o più soluzioni, ma comunque un numero finito di soluzioni (e quindi un numero finito di punti di intersezione),
  - ma potrebbe anche averne infinite.
- **intersezione con l'asse *y*:** l'intersezione con l'asse *y* esiste solamente se lo 0 (zero) appartiene al dominio della funzione, nel qual caso questa intersezione è unica per definizione stessa di una funzione, e sarà il punto di coordinate $(0, f(0))$. In caso di una funzione fratta basta porre il numeratore uguale a zero in quanto una frazione si annulla se si annulla il suo numeratore, sempre che $x = 0$ appartenga al suo dominio.

Segno della funzione

Ci si chiede ora di studiare il segno della funzione, cioè ci si chiede quando la funzione è positiva (sopra l'asse *x*) o negativa (al di sotto dell'asse *x*). In altre parole quali sono i valori della x appartenenti al dominio tali che sia soddisfatta la disequazione $f(x) > 0$ e quali invece siano tali che sia soddisfatta la $f(x) < 0$.

Può essere molto utile a questo punto annerire su un piano cartesiano tutte le zone in cui il grafico della funzione non può passare, se ad esempio nell'intervallo (a, b) la funzione risultasse positiva si annerirà la zona del piano sotto l'asse *x*, dove *x* è compresa fra a e b .

Calcolo dei limiti

Una volta stabilito il dominio e le particolari caratteristiche che può avere la funzione, si studia il comportamento della funzione sulla frontiera del dominio. In particolare si andrà a calcolare i limiti per *x* che tende a

- $-\infty$ se il dominio è illimitato inferiormente
- $+\infty$ se il dominio è illimitato superiormente
- $c \in \mathbb{R}$ se c è punto di accumulazione del dominio ma non è un suo punto interno. In alcuni casi sarà necessario limitarsi a calcolare solo il limite destro o il limite sinistro.

Continuità / Discontinuità della funzione

Si veda funzione continua e punto di discontinuità.

Il calcolo dei limiti permette di verificare la continuità di una funzione o di valutarne le discontinuità.

Individuazione degli asintoti

Con il calcolo dei limiti si è in grado di individuare anche l'esistenza di eventuali asintoti sia verticali, orizzontali che obliqui:

- **asintoto verticale**: è la retta di equazione $x = c$ se $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$,
- **asintoto orizzontale**: è la retta di equazione $y = l$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$,
- **asintoto obliquo**: è la retta di equazione $y = mx + q$ se si verificano nell'ordine le seguenti proprietà:
  - $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m; \text{ con } m \neq \pm\infty, \text{ e con } m \neq 0$
  - $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q,$

Da notare che potranno esserci:

- da zero a infiniti asintoti verticali,
- da zero a due asintoti orizzontali,
- da zero a due asintoti obliqui.

Si devono inoltre precisare alcune caratteristiche specifiche:

- le funzioni seno e coseno non presentano alcun asintoto,
- una funzione che ammette asintoti orizzontali, non ammette quelli obliqui e viceversa, mentre non c'è alcuna restrizione per gli asintoti verticali,
- Un asintoto verticale esiste solo se ci sono dei candidati asintoti nel campo d'esistenza, ovvero se la funzione è definita su tutto il campo dei reali, non esiste alcun asintoto verticale.

Derivata prima

A questo punto si effettua il calcolo della derivata della funzione per studiarne la crescenza e stabilire l'esistenza di eventuali punti stazionari. Tramite lo studio del segno della derivata si è in grado di individuare eventuali punti di massimo o di minimo.

Si veda la voce sul punto estremante.

Ci si occuperà quindi di studiare il segno della *funzione derivata* in modo da individuare per quali valori di *x* essa è positiva, negativa o nulla.

- dove f è derivabile e $f'(x) > 0,$ f è crescente,
- dove f è derivabile e $f'(x) < 0,$ f è decrescente,
- dove f è derivabile e $f'(x) = 0,$ f ha nel punto x
  - un massimo relativo o un minimo relativo se il segno della derivata prima e dopo il punto x (cioè in un suo intorno) è discorde,
  - un punto di flesso a tangente orizzontale, se il segno della derivata è costante in un intorno di x.

Derivata seconda

Successivamente si effettua lo studio della derivata seconda in modo da valutare se esistono punti di flesso (punti dove la derivata seconda si annulla) e valutare, quindi, grazie alla possibilità che essa ci dà di studiare la concavità, se i punti stazionari trovati con la derivata prima sono massimi, minimi di funzione o punti di flesso a tangente orizzontale.

Relazione con derivata seconda

Se $f'(x)$ è derivabile in x :

- se $f''(x) > 0$ allora f presenta una concavità verso l'alto in x,
- se $f''(x) < 0$ allora f presenta una concavità verso il basso in x,
- se $f''(x) = 0$ allora x è possibile sia un punto di flesso.

Derivata terza

Nel caso in cui $f''(x) = 0$ si procede con lo studio della derivata terza per sapere se la funzione presenta un flesso ascendente o discendente.

- se $f'''(x) > 0$ allora il flesso è ascendente,
- se $f'''(x) < 0$ allora il flesso è discendente,
- se $f'''(x) = 0$ allora si studia il segno delle derivate di grado via via maggiore sfruttando la seguente regola:
  - se la prima derivata che non si annulla è di ordine pari:
    - $f^{pari}(x) > 0$ flesso discendente,
    - $f^{pari}(x) < 0$ flesso ascendente,
  - se la prima derivata che non si annulla è di ordine dispari:
    - $f^{dispari}(x) > 0$ flesso ascendente,
    - $f^{dispari}(x) < 0$ flesso discendente.

Esempio

Effettuiamo ora lo studio di una funzione cubica $y = 3x^3 - 8x^2 + 5x + 1$:

Determinazione dell'insieme di definizione

La funzione esiste in tutto $\mathbb{R}$.

Simmetrie e periodicità

La funzione non soddisfa le equazioni di simmetria rispetto agli assi, né è soggetta a periodi

Intersezioni con gli assi

La funzione interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0; f(0))$ ovvero (0;1). Essa inoltre interseca l'asse delle x nel punto (-0.16;0) (il secondo risultato è ottenuto tramite approssimazione).

Segno della funzione

Per sapere il segno della funzione, in questo caso, avendo solo uno zero, basta sostituire un'ascissa maggiore ed un'ascissa minore dello zero per accorgersi che a sinistra di esso la funzione è negativa, a destra positiva.

Calcolo dei limiti

La funzione non ha punti in cui non è definita quindi ci basta calcolare il limite per $x \longrightarrow \pm\infty$:

- $\lim_{x \to +\infty} 3x^3 - 8x^2 + 5x + 1 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} 3x^3 - 8x^2 + 5x + 1 = -\infty$

Continuità/Discontinuità della funzione

La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$ come si vede anche dal dominio.

Individuazione degli asintoti

Poiché la funzione ha due limiti con tendenza all'infinito positiva e negativa uguali ad infinito di segno opposto, possiamo dire che essa può essere caratterizzata da due asintoti obliqui, applichiamo quindi le altre due condizioni per ottenere le equazioni di essi

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 8x^2 + 5x + 1}{x} = +\infty$

Ci possiamo anche fermare qui dicendo che la funzione non presenta asintoti.

Derivata prima

- $f'(x) = 9x^2 - 16x + 5$

Studiamo ora il segno della funzione derivata prima:

- $9x^2 - 16x + 5 > 0$

Ne consegue che:

- $f'(x) > 0 \ \forall x \in \left(-\infty; \frac{8 - \sqrt{19}}{9}\right) \cup \left(\frac{8 + \sqrt{19}}{9}; +\infty\right)$

La funzione presenta quindi due punti stazionari in $x_1 = \frac{8 - \sqrt{19}}{9}$ e $x_2 = \frac{8 + \sqrt{19}}{9}$.

Possiamo dire, inoltre, che la funzione è crescente da $-\infty$ a $\frac{8-\sqrt{19}}{9}$, decrescente da $\frac{8-\sqrt{19}}{9}$ a $\frac{8+\sqrt{19}}{9}$ e nuovamente crescente da $\frac{8+\sqrt{19}}{9}$ a $+\infty$.

Derivata seconda

Studiamo ora il segno della derivata seconda:

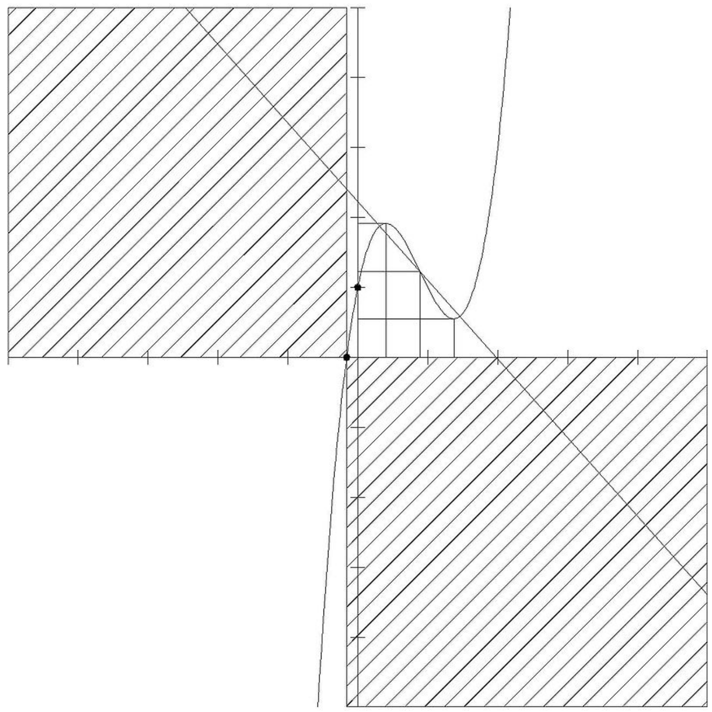

Grafico funzione esempio $y = 3x^3 - 8x^2 + 5x + 1$

- $f''(x) = 18x - 16$
- $18x - 16 > 0$
- $x > \frac{8}{9}$

Quindi nel punto stazionario $x_1 = \frac{8-\sqrt{19}}{9} < \frac{16}{18}$ la concavità è verso il basso, ci troviamo allora in un punto di massimo relativo.

Invece nel punto stazionario $x_2 = \frac{8+\sqrt{19}}{9} > \frac{16}{18}$ la concavità è verso l'alto, ci troviamo in un punto di minimo relativo.

La funzione derivata seconda si annulla in $x = \frac{8}{9}$, qui abbiamo allora un punto di flesso obliquo (perché non corrisponde con un punto stazionario).

Derivata terza

Calcoliamo la derivata terza per sapere se la curva passa sopra o sotto la derivata nel punto di flesso:

- $f'''(x) = 18$

Quindi $f'''(x) > 0$il flesso è ascendente.

Grafico

Si può quindi disegnare un grafico in questo modo:

Collegamenti esterni

- Sito dove è possibile scaricare un programma per tracciare il grafico di una funzione [1]

Riferimenti

[1] http://www.gabsoft.it/prod01.htm

Fonti e autori del articolo

Studio di funzione *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?oldid=25681002 *Contributors*: .mau., Alundra, Andriy18, AttoRenato, Baruneju, Bonza, Buggia, Cayman88, Civvì, Claude, Djdomix, Dommac, FrAnCiS, Gac, Grifone87, Guybrush Threepwood, KS, Lellats, Marcel Bergeret, Massic80, Matsoftware, Paginazero, Piddu, Pietrodn, Pokipsy76, Progettualita, Qualc1, Roberto.zanasi, Salvatore Ingala, Sanremofilo, Square87, Ylebru, 56 anonymous edits

Fonti, licenze e autori delle immagini

Immagine:Studio funzione esempio con derive.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Studio_funzione_esempio_con_derive.jpg *License*: unknown *Contributors*: Matsoftware

Immagine:Function y = 3·x^3 - 8·x^2 + 5·x + 1.jpg *Source*: http://it.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Function_y_=_3·x^3_-_8·x^2_+_5·x_+_1.jpg *License*: unknown *Contributors*: Alundra

Licenza